OLIMPÍADA PROVINCIAL 2018

PRIMER NIVEL

APELLIDO:

NOMBRES:

ESCUELA:..

LOCALIDAD:..

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

Problema 1

a) En el pizarrón están escritas las tres letras *abc*. Sofi y Teo, por turnos, eligen una de las letras y la reemplazan por un dígito. Comienza Sofi. Determinar si Sofi siempre puede lograr que el número de tres dígitos resultante sea múltiplo de 11. (Letras diferentes se pueden reemplazar por dígitos iguales, pero debe ser siempre $a \neq 0$.)

b) Inicialmente el pizarrón está vacío. Sofi comienza escribiendo un dígito, luego Teo escribe un segundo dígito a la derecha o a la izquierda del dígito escrito por Sofi, y finalmente Sofi escribe un tercer dígito a la derecha o a la izquierda de los dos dígitos ya escritos (no puede escribirlo entre los dos dígitos ya escritos). Determinar si Sofi puede siempre lograr que el número resultante de tres dígitos sea múltiplo de 11. (Igual que en a) se pueden repetir dígitos y el número resultante no puede comenzar con 0.)

Problema 2

En un conjunto de personas a algunas les gusta la matemática y a las otras les gusta la informática. El promedio de las edades de las personas a las que les gusta la matemática es igual a 15 y el de aquellas a las que les gusta la informática es igual a 25. Un día exactamente una persona se cambia de informática a matemática. Como consecuencia del cambio el promedio de las edades en los dos grupos aumentó en 1. Hallar la cantidad de personas del conjunto y dar un ejemplo que muestre que esta situación es posible.

Problema 3

Sea *ABCD* un paralelogramo con BAD menor que 90^{o} y tal que el lado *AB* es mayor que el lado *BC*. La bisectriz de BAD corta al lado *CD* en *E* y a la recta *BC* en *F*. Sea *O* el centro de la circunferencia que pasa por *C, E* y *F*. Demostrar que el triángulo *BDO* es isósceles.

OLIMPÍADA PROVINCIAL 2018
SEGUNDO NIVEL

APELLIDO:

NOMBRES:

ESCUELA:...

LOCALIDAD:...

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

Problema 1

En el pizarrón están escritos los números

$$3, \ 4, \ \text{y} \ \ 12.$$

La operación permitida es elegir dos números del pizarrón, digamos *X* e *Y*, escribir los números $\frac{3}{5}X-\frac{4}{5}Y$, $\frac{4}{5}X+\frac{3}{5}Y$, y borrar *X* e *Y*.

Decidir si, aplicando la operación permitida varias veces, es posible que los números escritos en el pizarrón sean 2, 8 y 10.

Problema 2

Ana y Beto juegan en un tablero de 6×6. En cada casilla del tablero Ana debe escribir una potencia de 2, desde 2^0 hasta 2^{35}, sin repeticiones.

Beto dibuja en el tablero un camino cerrado y sin entrecruzamientos, que pasa sucesivamente de una casilla a otra vecina. No hay restricciones acerca de la longitud del camino. Luego Beto suma los números de las casillas por las que pasó el camino dibujado.

Beto gana si esta suma tiene resto 1 o resto 2 en la división por 3.

Determinar si Ana puede ubicar las 36 potencias de 2 en el tablero para que Beto no pueda ganar.

Nota. Dos casillas son vecinas si comparten un lado.

Problema 3

En un paralelogramo *ABCD* de lados *AB*, *BC*, *CD* y *AD*, sean *E* el punto medio del lado *AD* y *F* en el segmento *CE* tal que *BF* es perpendicular a *CE*. Si $AB=CD=5$ y $BC=AD=9$, calcular la medida de *AF*.

OLIMPÍADA PROVINCIAL 2018
TERCER NIVEL

APELLIDO:

NOMBRES:

ESCUELA:...

LOCALIDAD:...

EN TODOS LOS PROBLEMAS,

LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

Problema 1

En un tablero de 5×9 se juega al siguiente juego: Inicialmente se colocan fichas en algunas casillas (ninguna casilla puede tener más de una ficha). Una *movida* consiste en mover simultáneamente todas las fichas según las siguientes reglas.

● Cada ficha se mueve a una casilla vecina siempre que la casilla de llegada esté vacía al recibir la ficha y que al finalizar la movida en cada casilla haya a lo sumo una ficha.

● Si una ficha se movió hacia $\uparrow$ ó $\downarrow$, luego se debe mover hacia $\rightarrow$ ó $\leftarrow$ en la siguiente movida y viceversa.

El juego termina cuando es imposible hacer una movida.

i) Demostrar que si inicialmente hay 33 fichas el juego terminará.

ii) Demostrar que es posible ubicar 32 fichas de modo que el juego no termine nunca.

Nota. Dos casillas son vecinas si comparten un lado.

Problema 2

Una sucesión: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ de enteros positivos es tal que:

cada número es mayor que el anterior, o sea $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ y

$a_{2n} = a_n + n$, para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Si el número a_{2018} es igual al menor primo mayor que 2018, determinar *n* tal que la suma de los primeros *n* términos sea igual a 6060, o sea, tal que $a_1 + a_2 + ... + a_n = 6060$.

Problema 3

Sea *ABCD* un trapecio con los lados paralelos *BC* y *DA*. Sean *M* y *N* los puntos medios de los lados *CD* y *BC* respectivamente y *P* el punto de intersección de los segmentos *AM* y *DN*. Si $AP = 3PM$, calcular $\dfrac{BC}{AD}$.